代数幾何学シンポジウム記録
1990年度　pp.41-48

Elliptic fibrations over Surfaces

東大・理　中山 昇

序。3次元代数多様体の分類論はMinimal Model予想が解決されたので、それぞれのminimal modelの構造を解明することが次の課題だが、まだあまりよく調べられていないと思う。2次元では、小平先生の楕円曲面論のように、手にとるようにその曲面の性質がわかる理論がある。だからといって3次元でも楕円曲線をファイバーにもつ多様体から調べるのがいいかどうかわからないが、飯高先生の分類論にあるように、小平次元0のファイバーをもつファイバー空間の構造を決めることは大事だと思う。小平次元 $\kappa = 2$ の3-foldが手にとるようにわかるまでには程遠いが、局所的な構造について少し解かってきた。

§1。$f: X \longrightarrow \Delta^2$ を3次元normal complex variety X から2次元unit polydisc Δ^2 へのprojective surjective morphism、(t_1, t_2) を Δ^2 の座標として、

$$l_1 = \{t_1 = 0\} \subseteq \Delta^2$$

$$l_2 := \{t_2 = 0\} \subseteq \Delta^2$$

とおく。次の(i)〜(v)を仮定する。

(i) f の制限 $X \setminus f^{-1}(l_1 \cup l_2) \longrightarrow \Delta^2 \setminus (l_1 \cup l_2)$ は smooth morphism で fiber は elliptic curve.

(ii) X は高々 terminal sing. のみしかもたない。

(iii) X は $\mathbb{Q}$-factorial over $0 \in \Delta^2$, つまり、$f^{-1}(0)$ の近傍で定義された Weil divisor D に対してある正の数 m があって mD は $f^{-1}(0)$ のまわりでは Cartier divisor になる。

(iv) X は f-nef, つまり f のファイバーに含まれる curve Γ に対して、$(K_X \cdot \Gamma) \geqq 0$.

(v) l_1 上の general singular fiber は I_a 型、l_2 上の general singular fiber は I_b 型、a, b は非負整数。

このとき次のことがいえる：

定理 1. X は非特異、f は flat、$f^{-1}(0)$ は I_{a+b} 型。

系 1. Δ^2 内の一般の曲線 C で $C \cap (l_1 \cup l_2) = \{0\}$ と

なるものについて、$f^{-1}(C)$ は nonsingular で $f^{-1}(C) \to C$ は $0 \in C$ で I_{a+b} 型の singular fiber をもつ minimal elliptic surface.

系2. $X' \longrightarrow \Delta^2$ で前出の仮定 (i)〜(v) をみたし、$X \longrightarrow \Delta^2$ と双有理的同値なものは、$0 \in \Delta^2$ 上の germ としては同型を除いて有限個しかない。

定理1, 系1, 系2 の証明は次のようになる。

まず $K_X = 0$ を示す。次に系1にあるような曲線 C をとってきて fiber product $f^{-1}(C)$ が rational double points しかもたないことを、variation of Hodge structures の canonical extensions と relative dualizing sheaf の higher direct images の関係を使って示す。すると $f^{-1}(0)$ が reduced curve であることがわかり、$0 \in \Delta^2$ 上局所的には section をつくることができる。従って [Na2] にあるように、X はある Weierstraß model の minimal resolution (partial) となる。$a = b = 0$ のときは、X 自身がこの Weierstraß model で $X \to \Delta^2$ は smooth morphism. a 又は b が正の時は この Weierstraß model は $0 \in \Delta^2$ の germ としては同型を除いて唯1つしかないことがわかる。よって X は この Weierstraß model の1つの

minimal partial resolution と flop でつながることがわかる。しかも実際に Weierstraß model の resolution を行なうと非特異な minimal resolution ができるので、定理1が示される。系2 は [KM] を適用して示される。

§2　§1 の minimal elliptic fibration $X \longrightarrow \Delta^2$ で a または b が正のものは $0 \in \Delta^2$ の germ としては、toric geometry によって構成できる。

$\delta : \mathbb{Z} \longrightarrow \{1, 2\}$ で、

$$\begin{cases} \delta(m+a+b) = \delta(m) & \forall m \in \mathbb{Z} \\ \#\{0 \leq m < a+b \mid \delta(m) = 1\} = a \\ \#\{0 \leq m < a+b \mid \delta(m) = 2\} = b \end{cases}$$

となる函数 δ をひとつとってくる。これに対し、函数 i, j : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を次のように inductive に定義する。

$$i(0) = j(0) = 0$$

$$\begin{cases} i(m+1) = i(m) + 1 \\ j(m+1) = j(m) \end{cases}, \quad \text{if } \delta(m) = 1$$

$$\begin{cases} i(m+1) = i(m) \\ j(m+1) = j(m) + 1 \end{cases}, \quad \text{if } \delta(m) = 2$$

ここで $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathcal{X}_k := \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t_1, t_2, s t_1^{-i(k)} t_2^{-j(k)}, s^{-1} t_1^{i(k+1)} t_2^{j(k+1)}] \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[t_1, t_2]} \Delta^2$$

とおくと、$\mathcal{X}_k$ たちは自然にはりあって $\underbrace{\mathcal{X}_\delta := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{X}_k}$

は3次元 complex manifold. $\mathcal{X}_\delta \longrightarrow \Delta^2$

の一般ファイバーは $\mathbb{C}^*$, 0 上の fiber は $\mathbb{P}^1$ の無限個(可算)

の chain となる。$\mathcal{X}_\delta$ の自己同型 $g: \mathcal{X}_\delta \to \mathcal{X}_\delta$ を

$$g^*(t_1) = t_1, \quad g^*(t_2) = t_2, \quad g^*(s) = s t_1^a t_2^b$$

で定義すると、g の $\mathcal{X}_\delta$ への作用が properly discontinuous で free となることが [N] にあるように、わかる。ここで得られる商空間 $\mathcal{X}_\delta/\langle g \rangle$ を X_δ とおくと、$X_\delta \longrightarrow \Delta^2$ は §1 の仮定 (i)〜(v) をみたす。ここで次のことがいえる。

定理2. 定理1 の X は $0 \in \Delta^2$ 上の germ としては上の X_δ のどれかに同型。

証明は X_δ から flop してもまた $X_{\delta'}$ とあらわせることがポイント。

§3。次に別の singular fiber の type の時を扱う。

$g: Y \longrightarrow \Delta^2_{(\tau_1,\tau_2)}$ を3次元 normal complex variety Y から2次元 unit polydisc Δ^2 への projective surjective morphism で、(τ_1,τ_2) が Δ^2 の座標、とする。次の(i)(ii)を仮定する。

(i) f は $\{\tau_1=0\}\cup\{\tau_2=0\}$ の外側で smooth で、fiber は elliptic curve

(ii) l_1 上の general singular fiber は $m\mathrm{I}_a$ 型、l_2 上の general singular fiber は $n\mathrm{I}_b$ 型、a 又は b は正整数とする。

この時 bicyclic covering $\Delta^2_{(t_1,t_2)} \longrightarrow \Delta^2_{(\tau_1,\tau_2)}$ を

$$\tau_1 = t_1^m, \quad \tau_2 = t_2^n$$

で定義すると fiber product $Y \times_{\Delta^2_{(\tau_1,\tau_2)}} \Delta^2_{(t_1,t_2)} \longrightarrow \Delta^2_{(t_1,t_2)}$ は §2でつくった X_δ（ただし a, b のかわりに ma, nb にしたもの）と $O \in \Delta^2_{(t_1,t_2)}$ 上の germ としては双有理同値になる。この X_δ には Galois group $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が有理的に作用している。次のことがいえた。

定理3. a) ある正の整数 p, q が存在して、

$$\gcd(p,m)=1 \qquad \gcd(q,n)=1$$

$$q\,ma \equiv p\,nb \mod (m \cdot n)$$

b)

$$\delta\left(k + \frac{ma+nb}{\mathrm{lcm}(m,n)}\right) = \delta(k) \quad \text{for } \forall k \in \mathbb{Z}$$

ならば、X_δ に $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が holomorphic に作用する。

c) X_δ への作用は次のように書ける。

$$(t_1, t_2, s) \longmapsto (\mu t_1, t_2, s \cdot \varepsilon_1 (t_1^{ma} t_2^{nb})^{\frac{p}{m}})$$
$$(t_1, t_2, s) \longmapsto (t_1, \nu t_2, s \cdot \varepsilon_2 (t_1^{ma} t_2^{nb})^{\frac{q}{n}})$$

ここで $\mu = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m})$ $\nu = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n})$,

$$\varepsilon_1 = \exp(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{m} \cdot (m-1)ap), \quad \varepsilon_2 = \exp(-\frac{\pi\sqrt{-1}}{n}(n-1)bq)。$$

よって Y は X_δ をこの作用で割ったものに双有理同値。しかしこの商空間は cyclic quotient sing. しかもたないが、non-canonical singularity をもつ case もある。

References

[KM] Y. Kawamata and K. Matsuki, The number of the minimal models for a 3-fold of general type is finite, Math. Ann., 276 (1987), 595–598.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki, Introduction to the minimal model problem, in Algebraic Geometry Sendai 1985, Adv. Stud. in Pure Math. 10 (1987) Kinokuniya and North-Holland, 283–360.

[N] I. Nakamura, Relative compactification of the Néron model and its application, in Complex Analysis and Algebraic Geometry, (1977) Iwanami and Cambridge Univ. Press, 207–225.

[Na1] N. Nakayama, The lower semi-continuity of the plurigenera of complex varieties, in the same book as [KMM], pp. 551–590.

[Na2] ——, On Weierstrass models, in Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata vol II (1987) Kinokuniya and North-Holland, 405–431.